Die verschiedenen Aufgaben der Integralrechnung

A Bestimme eine Stammfunktion zu f

Beispiele:

$$f(x)=2x^3 \Rightarrow \text{F(x)}=2\cdot\frac{1}{4}x^4=\frac{1}{2}x^4+C;\quad \text{f(x)}=\sqrt{2x-3}\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}(2x-3)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}(2x-3)\sqrt{2x-3}+C$$

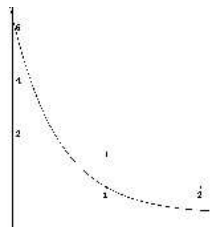
$$f(x)=e^x \Rightarrow F(x)=e^x+C;\ f(x)=2^x\Rightarrow F(x)=\frac{1}{\ln(2)}2^x+C;\ f(x)=e^{2x+1}\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}e^{2x+1}+C$$

B Bestimme das Integral

$$\int_a^b f(x)dx=\left[F(X)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

$$\int_1^2(2x-3)^4\,dx=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}(2x-3)^5\right]_1^2=\frac{1}{10}-\left(-\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{5};\ \int_1^2 3^{2x-2}dx=\left[\frac{1}{2\ln(3)}3^{2x-2}\right]_1^2=\frac{4}{\ln(3)}$$

C Bestimme den Inhalt der Fläche zwischen Kurve und x-Achse im Bereich [a;b]



Schritt 1: Berechne die Nullstellen auf [a;b] .
Schritt 2: Berechne die Beträge der Teilintegrale und addiere diese.

Beispiel: f(x)=$e^{(-2x+2)}$ -1 auf [0;2]

Nullstellen:

$$e^{-2x+2}=1 \qquad |\ln$$
$$\ln(e^{-2x+2})=\ln(1)$$
$$-2x+2=0 \qquad |-2\ |:(-2)$$
$$x_0=1$$

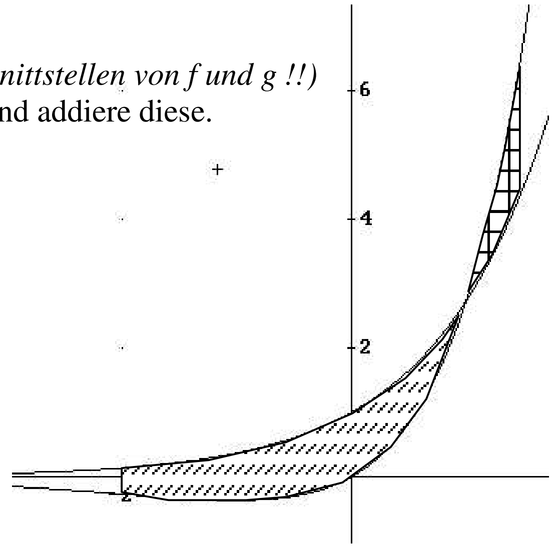
Teilintegrale:

$$\int_0^1 f(x)dx=\left[\frac{-1}{2}e^{-2x+2}-x\right]_0^1=$$
$$\left(\frac{-1}{2}e^{-2+2}-1\right)-\left(-\frac{1}{2}e^2\right)=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}e^2$$
$$\int_1^2 f(x)dx=\left(-\frac{1}{2}e^{-4+2}-2\right)-\left(-\frac{1}{2}e^{-2+2}-1\right)=-\frac{1}{2}e^{-2}$$
$$\Rightarrow\ A=\left|-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}e^2\right|+\left|-\frac{1}{2}e^{-2}\right|=$$
$$-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}e^{-2}\approx 2{,}262$$

D Bestimme den Inhalt der Fläche zwischen 2 Graphen f und g im Bereich [a;b]

Schritt 1: Bestimme die Differenzfunktion
h(x)=f(x)-g(x)
Schritt 2: Berechne die Nullstellen von h auf [a;b] . *(Schnittstellen von f und g !!)*
Schritt 3: Berechne die Beträge der Teilintegrale von h und addiere diese.

Beispiel: f(x)=xex ; g(x)= ex; Bereich [-2;1,5]



Besondere Eigenschaften von Funktionen des Typs $(x+a)e^x$

Nach der Produktregel gilt:

$$((x+a)e^x)'=1\cdot e^x+(x+a)e^x=(x+a+1)e^x$$

Hiermit kann man leicht ableiten und Stammfunktionen bilden:
f(x)=xe^x : f'(x)=$(x+1)e^x$ F(x)=$(x-1)e^x$+c
f(x)=$(x-3)e^x$: f'(x)=$(x-2)e^x$ F(x)=$(x-4)e^x$+c

h(x)= $xe^x - e^x = (x-1)\,e^x$;
Nullstellen: e^x ist immer positiv, also kann nur x-1 zu Null werden $\Rightarrow$ $x_0 = 1$

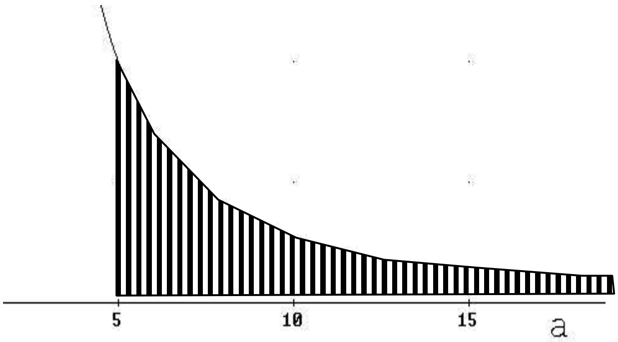
Die verschiedenen Aufgaben der Integralrechnung

$$\int_{-2}^{1} h(x)dx = \left[(x-2)e^x\right]_{-2}^{1} = (-e^1)-(-4e^{-2}) \approx -2{,}1769$$

$$\int_{1}^{1,5} h(x)dx = \left[(x-2)e^x\right]_{1}^{1,5} = (-0{,}5e^{1,5})-(-e^1) \approx 0{,}4774$$

Der gesuchte Flächeninhalt misst |2,1769|+04774=2,6543 Flächeneinheiten

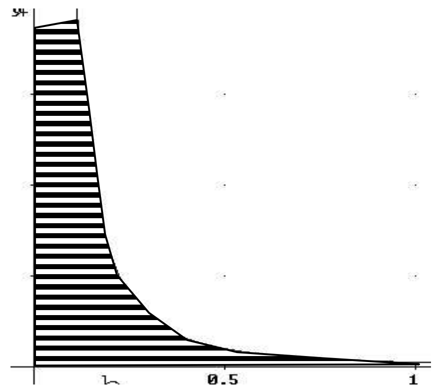
E Bestimme den Inhalt von „unendlichen Flächen“ (Grenzwerte)



Gesucht ist die Fläche, die der Graph von $\frac{1}{x^2}$ für $5 \leq x < \infty$ mit der x-Achse begrenzt.

$$A = \lim_{a\to\infty}\int_5^a \frac{1}{x^2}dx = \lim_{a\to\infty}\left[\frac{-1}{x}\right]_5^a = \lim_{a\to\infty}\left(\frac{-1}{a}+\frac{1}{5}\right) = (-0+5) = 5$$

$$A = \lim_{b\to 0}\int_b^1 \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to 0}\left[\frac{-1}{x}\right]_b^1 = \lim_{b\to 0}\left(\frac{-1}{1}+\frac{1}{b}\right) = \infty$$



F Bestimme das Volumen von Rotationskörpern.

1) Die von der Funktion $f(x)=x^2-x$ und der x-Achse eingeschlossene Fläche rotiere um die x-Achse.

Schritt 1: Nullstellen 0 und 1

Schritt 2: $V = \pi\int_0^1 f^2(x)dx = \pi\int_0^1 (x^4-2x^3+x^2)dx = \pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{30}$

2) Die von den Funktionen $f(x)=x^2+1$ und $g(x)=x+3$ rotiere eingeschlossene Fläche rotiere um die x-Achse. *(Hier keine Differenzfunktion bilden !)*

Schritt 1: Schnittstellen von f und g: -1 und 2

Schritt2: $V = \pi\int_{-1}^{2} g^2(x)dx - \pi\int_{-1}^{2} f^2(x)dx = 39\pi - \frac{78}{5}\pi = \frac{117}{5}\pi$

3) Besondere Rotationsprobleme:

Volumen des Torus.

Hier wird der Wert des Kreisintegrals $\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx = \frac{\pi r^2}{2}$ benutzt

„Rotierende Fläche beiderseits der x-Achse“

Hier entstehen überlagernde Körper. Man spiegelt einfach den unteren Teil an der x-Achse und löst das neue Problem!